A.S 20021/22 LICEO DELLE SCIENZE APPLICATE

SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME 6 APRILE 2022

Il candidato risolva un problema, a scelta, tra i due proposti e 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Fissato k ∈ R, la funzione $f_k(x): R \to R$ è così definita: $f_k(x): e^{-kx^2}$.

Si indichi con Γ_k il suo grafico in un riferimento cartesiano Oxy.

. Descrivere andamento di f_k a seconda delle possibili scelte di k ∈ R

. Determinare per quali valori di k ∈ R il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostrare che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono da k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia K, passano tutte per $T(0, \frac{2}{\sqrt{e}})$.

Assunto k>0, sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e il Γ_k.

Provare che esiste un unico rettangolo R_k di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x, e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k. E' possibile scegliere k in modo che il rettangolo R_k sia un quadrato?

PROBLEMA 2

Considera la funzione $f(x) = \ln(1 + x^2) + \arctan x$.

a. Dopo aver dimostrato che $f(x)$ ammette uno zero nell'intervallo $[-2; -1]$ e non ammette zeriper $x > 0$, studia la funzione e disegnane il possibile grafico.
b. Dimostra che il grafico di $f(x)$ ha due punti di flesso F_1 e F_2 e che le rette tangenti in tali puntisono tra loro perpendicolari.
c. Studia e rappresenta in uno stesso riferimento le funzioni

$$h(x) = f'(x) \quad \text{e } g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

d. Dimostra poi che i massimi e i minimi delle due funzioni sono tutti e soli i punti di intersezione tra l'insieme immagine di $h(x)$ e l'insieme immagine di $g(x)$, come interpreti questo risultato dalpunto di vista delle tangenti al grafico di $f(x)$?

QUESITI

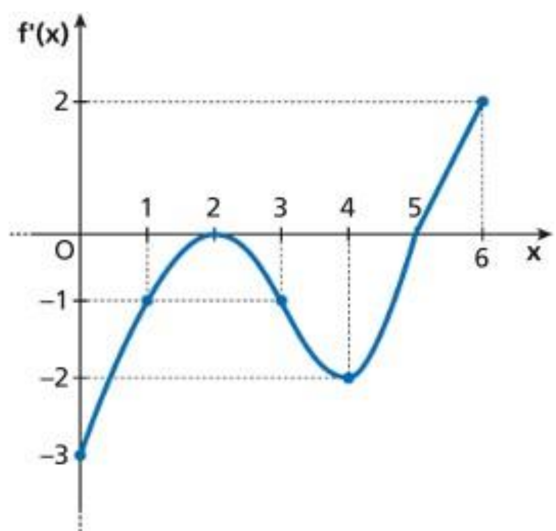
1) Si spieghi perché l'equazione cos(x) = x ha almeno una soluzione.

2) Applicando il teorema di Lagrange, di mostra che

$$|arctanx| \leq |x| \quad \forall x \in R$$

3) Una bevanda viene venduta in lattine, ossia contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le suedimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

4) Della funzione $f(x)$, definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda eche il grafico della sua derivata $f'(x)$ presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando la risposta in modo esauriente. Sulla base delle informazioni date, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?



5) Una scatola contiene 30 palline, numerate da 1 a 30. Le palline sono di due colori diversi: quelle ilcui numero è multiplo di 3 sono nere, le rimanenti sono bianche. Si estraggono 3 palline simultaneamente. Determinare la probabilità degli eventi:

A: «le palline sono di uno stesso colore»;

B: «il più piccolo dei numeri estratti è 15»;

C: «le palline sono di colori diversi».

6) Un esame del sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un falso positivo (esito positivo quando la malattia non è in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 0.5% della popolazione abbia la malattia. Quale è la probabilitàche una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test è positivo? E qual è la probabilità che una persona, risultata negativa al test, sia di fatto malata?

7) Se la funzione f(x) – f(2x) ha derivata 5 in x=1, derivata 7 in x=2, qual è la derivata di f(x)- f(4x) in x=1?

8) La funzione $f: R \to R$ soddisfa la seguente proprietà:

$$f(x^2) \cdot f''(x) = f'(x) \cdot f'(x^2) \qquad \forall x \in R$$

Sapendo che $f(1) = 1$ e $f''(1) = 8$, determina il valore di $f'(1) + f''(1)$